

היסודות לאוקלידס - ספר ראשון

היסודות לאוקלידס - ספר ראשון
תורגם מיוונית לאנגלית על ידי **ריצ'רד פיצפטריק**.
תורגם מאנגלית לעברית על ידי **שריה אנסבכר**.
מפורסם תחת רישיון **CC BY-NC-SA 4.0**.

תוכן העניינים

הקדמות

4	מתוך הקדמת המתרגם לאנגלית - Richard Fitzpatrick
4	אודות התרגום - מיוונית לאנגלית, ומאנגלית לעברית

הגדרות

5	הנחות יסוד ומוסכמות מקובלות
6	הנחות יסוד
6	מוסכמות מקובלות

משפט 1

6

משפט 2

7

משפט 3

8

משפט 4

8

הקדמות

מתוך הקדמת המתרגם לאנגלית - Richard Fitzpatrick

ה"יסודות" של **אוקלידס** הוא ללא ספק היצירה המתמטית המפורסמת ביותר של העת העתיקה הקלאסית, והוא ראוי לכבוד בהיותו ספר הלימוד המתמטי העתיק ביותר בעולם שנמצא בשימוש רציף. מעט ידוע על המחבר, מעבר לעובדה שהוא חי באלכסנדריה בסביבות שנת 300 לפנה"ס. הנושאים העיקריים של היצירה הם גאומטריה, פרופורציה ותורת המספרים. מרבית המשפטים המופיעים ב"יסודות" לא התגלו ע"י המחבר, אלא הם פרי עבודתם של מתמטיקאים יוונים קדומים יותר כגון: **פיתגורס** (והאסכולה שלו), **היפוקרטס מכיוס**, **תאיטטוס מאתונה ואודוקסוס מקנידוס**. עם זאת, אוקלידס זוכה בדרך כלל להכרה על סידור המשפטים באופן לוגי המראה (יש להודות, לא תמיד בקפדנות הנדרשת ע"י המתמטיקה המודרנית) שהם נובעים בהכרח מחמש אקסיומות פשוטות. אוקלידס זוכה גם להכרה על פיתוח מספר הוכחות מחוכמות למשפטים התגלו זה מכבר, כגון משפט 48 בספר הראשון. הבניית הגאומטריות שבהן עוסק ה"יסודות" מוגבלות לאלו שניתן להשיג **באמצעות סרגל ומחוגה**. יתרה מזאת, הוכחות באמצעות מדידה אסורות בהחלט: כלומר כל השוואה בין שני גדלים מוגבלת לאמירה שהגדלים שווים, או שהאחד גדול מהאחר. ה"יסודות" מורכב משלושה-עשר ספרים. הספר הראשון מתאר את המשפטים הבסיסיים של גאומטריית המישור, כולל שלושת המקרים שבהם משולשים חופפים, משפטים שונים המערבים ישרים מקבילים, המשפט בנוגע לסכום זוויות במשולש, ומשפט פיתגורס. הספר השני נחשב בדרך כלל לעוסק ב"אלגברה גאומטרית", מכיוון שלרוב המשפטים הכלולים בו יש משמעויות אלגבריות פשוטות. הספר השלישי חוקר מעגלים ותכונותיהם, וכולל משפטים על משיקים וזוויות היקפיות. הספר הרביעי עוסק במצולעים משוכללים החסומים במעגלים, או חסומים מעגלים. הספר החמישי מפתח את התורה האריתמטית של פרופורציה. הספר השישי מיישם את תורת הפרופורציה על גאומטריית המישור ומכיל משפטים על צורות דומות. הספר השביעי עוסק בתורת המספרים האלמנטרית: מספרים ראשוניים, המכנה המשותף הקטן ביותר וכדומה. הספר השמיני עוסק בסדרות הנדסיות. הספר התשיעי מכיל יישומים שונים של תוצאות משני הספרים הקודמים, וכולל משפטים על קיום אין-סוף מספרים ראשוניים, כמו גם על סכום של סדרה הנדסית. הספר העשירי מנסה לסווג גדלים חסרי **מידה משותפת** (כלומר אי-רציונליים) באמצעות מה שמכונה "שיטת המיצוי", הקדמה עתיקה לאינטגרציה. הספר האחד-עשר עוסק במשפטים בסיסיים של גאומטריה תלת-ממדית. הספר השנים-עשר מחשב את הנפחים היחסיים של חרוטים, פירמידות, גלילים וכדורים, תוך שימוש בשיטת המיצוי. לבסוף, הספר השלושה-עשר חוקר את חמשת הגופים האפלטוניים.

אודות התרגום - מיוונית לאנגלית, ומאנגלית לעברית

ה"יסודות" נכתב במקור ביוונית על ידי **אוקלידס** בסביבות שנת 300 לפני הספירה. יותר מאלפיים שנה לאחר מכן, נערך המקור היווני על ידי יוהאן לודוויג הייברג (**Johan Ludvig Heiberg**) והיינריך מנגה. בשנת 1908 פורסם תרגום של ה"יסודות" לאנגלית שכתב תומס הית' **(Heath Thomas)**¹, ועליו התבסס ריצ'רד פיצפטרק (**Richard Fitzpatrick**) בתרגום לאנגלית מודרנית שהוציא לאור בשנת 2007 ותיקן בשנת 2008 (מסת"ב 1-7984-6151-0-978). תרגום זה, יחד עם המקור היווני כפי שנערך על ידי הייברג, מפורסם גם באתר של פיצפטרק בכתובת <https://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf>.

נכון לזמן כתיבת שורות אלה, לא קיים תרגום של ה"יסודות" לעברית מודרנית. כחובב גאומטריה מושבע הדבר חרה לי מאוד, וכך, נאמן לפתגם "קריינא דאיגרתא איהו ליהווי פרונוקא"², החלטתי לכתוב תרגום כזה בעצמי. מכיוון שאיני יודע יוונית ביקשתי מריצ'רד פיצפטרק להשתמש בתרגום שלו לאנגלית, והוא נענה לי בשמחה. כעת עמדה בפניי הדילמה האלמותית של כל המתרגמים: עד כמה "להיצמד" לטקסט המקורי ועד כמה להתאימו לשפת הקורא. בעצתו של חברי הטוב, אריאל גלפרין, החלטתי לתרגם באופן חופשי מאוד, מתוך הבנה שאם אצמד לניסוח המקורי אחטא למטרה הראשית של התרגום שהיא להיות מובן לקורא המודרני. בנוסף, איני מתרגם מקצועי, כך שמן הסתם לא אצליח להיצמד לנוסח המקורי כראוי (אפילו אם אנסה), מה גם שבכל מקרה מדובר בתרגום של תרגום. יתרון נוסף לתרגום חופשי הוא שהוא דורש זמן מועט יותר, שהרי אינו נצרך לבחירת הנוסח המדויק, וכך יקל עליי להשלים את המשימה. שריה אנסבכר, יוני 2025

¹ אין זה התרגום הראשון לאנגלית אך הוא מעניין אותנו בגלל ההמשך.

² פתגם ארמי שתרגומו המילולי הוא "קריין האיגרת הוא יהיה השליח", ובעברית פשוטה: "אתה רוצה שדבר מה יקרה? אל תחכה לאחרים, אלא עשה אותו בעצמך!"

הגדרות

1. נקודה היא דבר שאינו ניתן לחלוקה לחלקים קטנים יותר.
2. קו הוא בעל אורך, אך חסר רוחב³.
3. הקצוות של קו הם נקודות.
4. קו ישר או קטע, הוא קו הנמצא באופן שווה עם נקודות שעליו⁴.
5. משטח הוא בעל אורך ורוחב בלבד (אך חסר גובה).
6. הקצוות של משטח הם קווים.
7. משטח מישורי הוא משטח הנמצא באופן שווה עם הקווים הישרים שעליו⁵.
8. הנטייה בין שני קווים, הנמצאים על אותו מישור ונפגשים בנקודה אחת, אשר אינם נמצאים בקו ישר, תיקרא זווית מישורית.
9. זווית ישרת-קווים (או סתם זווית) היא הנטייה שבין שני קווים ישרים הנפגשים בנקודה אחת.
10. זווית ישרה היא הזווית הנוצרת בין שני קווים ישרים, כאשר אחד מהם "עומד" על האחר ונוצרות שתי זוויות צמודות שוות.
11. זווית קהה היא זווית גדולה מזווית ישרה.
12. זווית חדה היא זווית קטנה מזווית ישרה.
13. שפה היא קצה של משהו⁶.
14. צורה היא מה שנתחם ע"י שפה אחת או כמה שפות.
15. עיגול הוא צורה מישורית⁷ המוקפת על ידי קו אחד (הנקרא מעגל), כך שקיימת נקודה בתוך העיגול, המקיימת שהקווים הישרים היוצאים ממנה אל הנקודות שעל המעגל שווים זה לזה (באורכם). כל קו ישר כזה ייקרא רדיוס.
16. הנקודה בתוך העיגול, שהקווים הישרים היוצאים ממנה אל הנקודות שעל המעגל שווים זה לזה, נקראת מרכז העיגול / המעגל.
17. קוטר של עיגול/מעגל הוא קטע הועבר דרך מרכז העיגול/מעגל, וקצותיו על המעגל. כל קוטר חוצה את המעגל לשני חלקים שווים⁸.
18. חצי-עיגול הוא הצורה המוקפת על ידי קוטר וחצי המעגל הנחתך על ידו. מרכז חצי-העיגול הוא מרכז העיגול המתאים.
19. מצולעים הם צורות מישוריות המוקפות על ידי קווים ישרים הנקראים צלעות. מצולעים המוקפים על ידי שלוש צלעות נקראים משולשים (ביחיד: משולש), ואלו המוקפים על ידי ארבע צלעות נקראים מרובעים (ביחיד: מרובע).
20. משולשים על פי צלעות
 - משולש שווה-צלעות הוא משולש בעל שלוש צלעות שוות.
 - משולש שווה-שוקיים הוא משולש בעל שתי צלעות שוות, ושתיים בלבד.
 - משולש שונה-צלעות הוא משולש בעל צלעות שונות זו מזו.
21. משולשים על פי זוויות
 - משולש ישר-זווית הוא משולש שאחת מזוויותיו ישרה.
 - משולש קהה-זווית הוא משולש שאחת מזוויותיו קהה.
 - משולש חד-זווית הוא משולש ששלוש זוויותיו חדות.
22. מרובעים על פי צלעות וזוויות
 - ריבוע הוא מרובע ישר-זווית ושווה-צלעות (כלומר שכל זוויותיו ישרות וכל צלעותיו שוות זו לזו).
 - מלבן הוא מרובע ישר זווית שאינו שווה-צלעות.
 - מעוין הוא מרובע שווה-צלעות שאינו ישר-זווית.
 - מקבילית היא מרובע בעל שני זוגות של צלעות נגדיות שוות, ושני זוגות של זוויות נגדיות שוות.
23. קווים מקבילים הם קווים ישרים הנמצאים באותו מישור, שגם אם נאריך אותם כקווים ישרים כמה שנרצה - לא ייפגשו לעולם.

³ לאו דווקא קו ישר, לדוגמה: גם מעגל הוא נחשבת קו. כל ההערות (כולל ההערות בסוגריים בגוף הטקסט) הן משל המתרגם לעברית, מלבד הערות השוליים המסומנות בדיקור (†) - אלו שייכות למתרגם לאנגלית.

⁴ התרגום האנגלי הוא: "A straight-line is (any) one which lies evenly with points on itself", לא ברור מהי כוונתו של אוקלידס כאן, אבל כולנו יודעים מהו קו ישר (כלומר כזה שאינו עקום).

⁵ התרגום האנגלי הוא: "A plane surface is (any) one which lies evenly with the straight-lines on itself", לא ברור מהי כוונתו של אוקלידס כאן, אבל כולנו יודעים מהו קו ישר (כלומר כזה שאינו עקום).

⁶ בין אם הוא קו שאז מדובר בנקודה, ובין אם הוא משטח שאז מדובר בקו.

⁷ צורה מישורית היא צורה (הגדרה 14) שהיא גם משטח מישורי (הגדרה 7).

⁸ למעשה יש להתייחס לזה כהנחת יסוד, ולא כחלק מהגדרה.

הנחות יסוד ומוסכמות מקובלות

הנחות יסוד

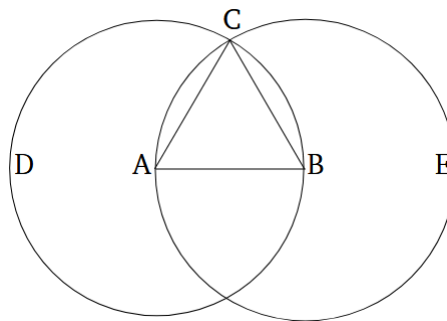
1. בין כל שתי נקודות שונות ניתן לשרטט קו ישר (קטע).
2. בהינתן קו ישר (קטע), ניתן להאריכו לשני הכיוונים ללא הגבלה, תוך שמירה על היותו קו ישר.
3. בהינתן קטע, ניתן לשרטט מעגל שמרכזו באחת מקצותיו והקטע הוא רדיוס שלו.
4. כל הזוויות הישרות שוות זו לזו.⁹
5. אם קו ישר חותך שני שווים ישרים אחרים, כך שבאחד מצדדיו סכום שתי הזוויות הפנימיות קטן מסכום שתי זוויות ישרות, אז אם נאריך את שני הקווים די הצורך - ייפגשו בנקודה הנמצאת באותו צד של הישר הראשון.

מוסכמות מקובלות

1. שני דברים השווים לאותו דבר שווים גם זה לזה.
2. אם דברים שווים נוספים לדברים שווים אז הסכומים שווים.
3. אם דברים שווים מופחתים מדברים שווים אז ההפרשים שווים.
4. דברים המתלכדים זה עם זה שווים זה לזה.
5. כל דבר גדול מכל חלק שלו.

משפט 1

נרצה לבנות משולש שווה-צלעות כך שאחת מצלעותיו היא קטע נתון.



יהי AB קטע, אם כן אנו נדרשים לבנות משולש שווה-צלעות ש- AB הוא אחת מצלעותיו. יהי BCD ¹⁰ מעגל בעל מרכז A ורדיוס AB (הנחה 3). יהי ACE מעגל בעל מרכז B ורדיוס BA (הנחה 3). נשרטט את הקטעים CA ו- CB (הנחה 1), שניהם יוצאים מהנקודה C שבה המעגלים חותכים זה את זה¹¹. מכיוון ש- A היא מרכז המעגל CDB , הקטע AC שווה לקטע AB (הגדרה 15). שוב: מכיוון ש- B היא מרכז המעגל CAE , הקטע BC שווה לקטע BA (הגדרה 15). אבל הראינו שגם CA שווה ל- AB , לפיכך כל אחד מהקטעים AC ו- BC שווים לקטע AB , ולכן הם שווים גם זה לזה (מוסכמה 1). לפיכך שלושת הקטעים CA , AB , ו- BC שווים זה לזה, ואם כן המשולש ABC הוא משולש שווה-צלעות ש- AB הוא אחת מצלעותיו. מש"ל.

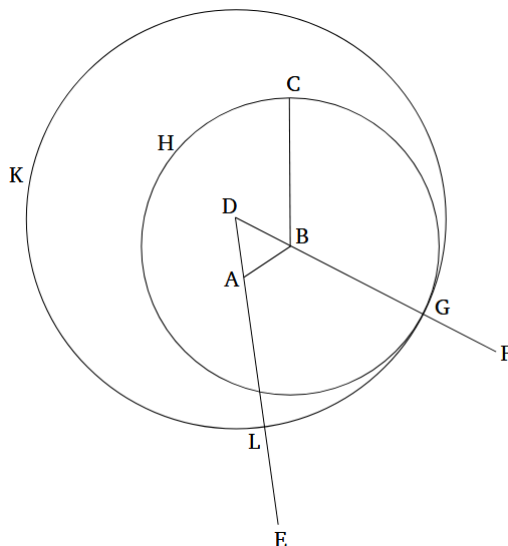
⁹ אין זו הנחה טריוויאלית מפני שכזכור (הגדרה 10) זווית ישרה לא הוגדרה כחצי מזווית שטוחה, אלא כזווית הנוצרת בין קו ישר ה"עומד" על קו ישר אחר, כך שהוא יוצר שתי זוויות צמודות שוות. אף אחד אינו מבטיח לנו שכאשר שני קווים ישרים עומדים על שני קווים ישרים אחרים (כל אחד על קו אחד) מתקיים שהזוויות הנוצרות בשני המקרים שוות זו לזו.

¹⁰ אצל אוקלידס הציור אינו "להמחשה בלבד", אלא הוא חלק מתוכן הספר, ובמקרה זה הוא מאפשר לנו לתת למעגל שם לפי הנקודות הנמצאות עליו.

¹¹ הקיים של C אינו נובע מהנחות היסוד, והוא צריך לנבוע מהנחת יסוד נוספת. ניסוח אפשרי של הנחת היסוד הזו: שני מעגלים שהמרחק בין המרכזים שלהם אינו גדול ממש מסכום הרדיוסים שלהם, נחתכים בנקודה אחת.

משפט 2

נתונה נקודה A , ונתון קטע BC .
נרצה לבנות קטע שווה לקטע נתון, כך שאחד מקצותיו הוא נקודה נתונה.



תהא A נקודה, ויהי BC קטע, אם כן אנו נדרשים לבנות קטע באורך של BC כך שאחד מקצותיו הוא הנקודה A .
נשרטט את הקטע AB (הנחה 1)¹².

יהי DAB משולש שווה-צלעות שהקטע AB הוא אחת מצלעותיו (משפט 1).

יהיו AE ו- BF קווים ישרים הנוצרים מהארכת הקטעים DA ו- DB בהתאמה (הנחה 2).

יהי CGH ¹³ מעגל בעל מרכז B ורדיוס BC (הנחה 3).

יהי GKL ¹⁴ מעגל בעל מרכז D ורדיוס DG (הנחה 3).

מהעובדה ש- B היא מרכז המעגל CGH נובע שהקטע BC שווה לקטע BG (הגדרה 15).

כמו כן, מהעובדה ש- D היא מרכז המעגל GKL נובע שהקטע DL שווה לקטע DG (הגדרה 15).

בתוך שני אלה הקטעים DA ו- DB שווים זה לזה (ABD הוא משולש שווה-צלעות), ולכן אם נפחית מ- DL את DA ומ- DG את DB נקבל קטעים שווים (מוסכמה 3); כלומר הקטע AL שווה לקטע BG .

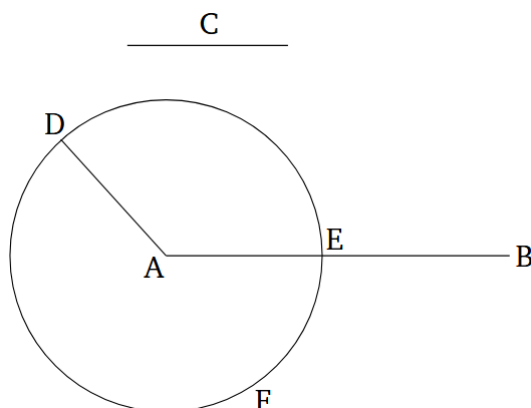
הקטעים AL ו- BC שווים שניהם לקטע BG ולכן גם שווים זה לזה (מוסכמה 1). אם כן AL הוא קטע המקיים את המבוקש. מש"ל.

¹²אוקלידס מניח כאן במובלע שהנקודות A ו- B שונות, הנחה זו אינה בעייתית משום שאם הן זהות הרי שהקטע BC עונה על המבוקש.

¹³ G היא הנקודה שבה הקטע BF חותך את המעגל. הקיום של G אינו נובע מהנחות היסוד, והוא צריך לנבוע מהנחת יסוד נוספת. ניסוח אפשרי של הנחת היסוד הזה: בהינתן קטע ומעגל שמרכזו באחד מקצות הקטע, אם רדיוס המעגל קצר מאורך הקטע אז המעגל חותך את הקטע. במקרה שלנו העובדה שניתן להאריך את הקטע DB ללא הגבלה מאפשרת לנו לבחור את הנקודה F כך ש- BF ארוך מ- BC (שהוא הרדיוס של S_1), ולכן על פי הנחת היסוד החדשה המעגל CGH חותך את הקטע BF .
¹⁴ L היא הנקודה שבה הקטע AE חותך את המעגל, וראה הערה קודמת לגבי הקיום של L .

משפט 3

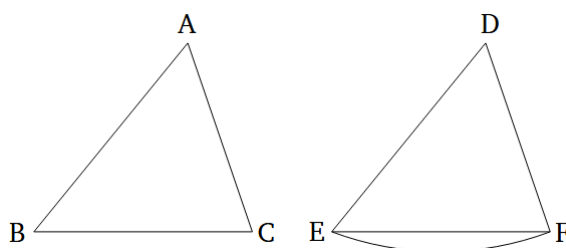
בהינתן שני קטעים שאינם שווים, נרצה לחתוך מהקטע הארוך קטע השווה לקטע הקצר.



יהיו AB ו- C שני קטעים, כך ש- AB גדול מ- C . אם כן, אנו נדרשים לחתוך מהקטע AB קטע באורך של C .
 יהי AD קטע באורך של הקטע C (משפט 2).
 יהי DEF ¹⁵ מעגל בעל מרכז A ורדיוס AD (הנחה 3).
 מכיוון שהנקודה A היא מרכז המעגל DEF , AE שווה ל- AD (הגדרה 15).
 אבל, C גם הוא שווה ל- AD , ולכן AE שווה ל- C (מוסכמה 1), אם כן AE עונה על המבוקש. מש"ל.

משפט 4

צריך להוכיח: אם במשולש יש זוג צלעות השוות לזוג צלעות במשולש אחר, ובנוסף הזווית התחומה בין שתי הצלעות במשולש הראשון שווה לזו התחומה בין שתי הצלעות במשולש השני, אז הצלע השלישית במשולש הראשון שווה לצלע השלישית בזה השני, והזוויות הנותרות במשולש הראשון שוות לזוויות הנותרות במשולש השני בהתאמה (משפט חפיפה צלע-זווית-צלע).



יהיו ABC ו- DEF שני משולשים, כך שהצלעות AB ו- AC שוות לצלעות DE ו- DF בהתאמה, והזווית BAC שווה לזווית DEF .
 אני אומר שהבסיס BC שווה גם הוא לבסיס EF , והמשולש ABC שווה למשולש DEF , והזוויות ABC ו- ACB שוות לזוויות DEF ו- DFE בהתאמה.
 שכן, אם נניח את המשולש ABC ונניח אותו על המשולש DEF ¹⁶, כך שהנקודה A תונח על הנקודה D , והקו הישר AB יונח על DE , אז הנקודה B תתלכד עם הנקודה E , וזאת משום ש- AB שווה ל- DE .
 היות שהקטע AB מתלכד עם הקטע DE , גם הקטע AC מתלכד עם הקטע DF , וזאת משום שהזווית BAC שווה לזווית EDF . אם כן, הנקודה C מתלכדת עם הנקודה F , שוב: בגלל ש- AC שווה ל- DF .

¹⁵ E היא הנקודה שבה הקטע AB חותך את המעגל, וראה הערה 13.

¹⁶ ההזזה צורה אחת והנחתה על צורה אחרת צריכה להיחשב הנחת יסוד נוספת, כיום מקובל להניח את משפט צלע-זווית-צלע כאחת מהנחות היסוד של הגאומטריה.

אבל הנקודה B מתלכדת עם הנקודה E , ומכאן שהבסיס BC מתלכד עם הבסיס EF ; משום שאחרת, היות ש- B מתלכדת עם E , ו- C עם F , נקבל ששני קווים ישרים מקיפים צורה בעלת שטח¹⁷, וזה בלתי אפשרי¹⁸. לפיכך, הבסיס BC מתלכד עם הבסיס EF , ולכן הם שווים (מוסכמה 4).

אם כן, כל המשולש ABC מתלכד עם כל המשולש DEF , ולכן שווה לו (מוסכמה 4); והזוויות הנשארות (במשולש ABC) מתלכדות עם הזוויות הנשארות (במשולש DEF), ולכן שוות להם; כלומר הזווית ABC שווה לזווית DEF , ו- ACB שווה ל- DFE . מש"ל.

¹⁷עניין זה מומחש בקו המעוגל שבאיור - אוקלידס נאלץ לצייר קו מעוגל כדי לתחום צורה בעלת שטח בין שני קווים שקצותיהם E ו- F .
¹⁸המתרגם לאנגלית העיר כאן שהדבר נובע מהנחה 1, והוא מפרש אותה כך שבין שתי נקודות ניתן לשרטט קו ישר יחיד. הבעיה בפירוש זו היא שאז לא ברור מדוע אוקלידס נדרש לכך ששני קווים ישרים לא יכולים להקיף צורה בעלת שטח, הלא היה יכול להשתמש בעובדה שמדובר בשני קווים ישרים שקצותיהם באותן שתי נקודות, ומכיוון שבין שתי נקודות ניתן לשרטט קו ישר יחיד הרי שהקטעים הללו מוכרחים להיות זהים.